

Clasificación de objetos mediante momentos de Hahn 3D y aprendizaje profundo

Saúl Rivera-López, Lucia Gutiérrez-Lazcano, Horlando Vargas-Vargas,
Alicia Noriega-Escamilla

Universidad Politécnica de Tulancingo,
México

{1915001,lucia.gutierrez,horlando.vargas.1631027,
alicia.noriega.173102}@upt.edu.mx

Resumen. En este trabajo se presenta un análisis con momentos ortogonales discretos clásicos de Hahn para la clasificación de objetos 3D, utilizando diferentes clasificadores y la implementación de una red neuronal eficiente como propuesta para mejorar la precisión en la clasificación de objetos. Se utiliza la base de datos SHREC11 para comparar con otros métodos existentes. Finalmente, se presenta un análisis de los resultados.

Palabras clave: Clasificación de objetos 3D, polinomios ortogonales discretos 3D, modelos de clasificación, redes neuronales.

Object Classification Using 3D Hahn Moments and Deep Learning

Abstract. This paper presents an analysis with classic Hahn discrete orthogonal moments for the classification of the 3D object using different classifiers and the implementation of a neural network as the proposal to improve precision in the object classification. SHREC11 database is used to compare with other methods. Finally, an analysis of the results is presented.

Keywords: Classification of 3D objects, discrete orthogonal polynomials, classification models, neural networks.

1. Introducción

Actualmente existe un enorme avance en la tecnología de adquisición de modelos 3D para diferentes campos científicos. Además, el desarrollo de modelos para la manipulación y procesamiento de objetos 3D están aumentando rápidamente. Por otra parte, el proceso de clasificación y recuperación de objetos 3D se ha vuelto un tema importante en diversas áreas de investigación, lo que ha llevado a desarrollar herramientas de clasificación eficientes y rápidas[2].

La representación y descripción de imágenes 3D es muy importante para la clasificación de objetos 3D debido a su capacidad de descripción.

Los momentos 2D y 3D han sido considerados herramientas para la descripción de características y se han aplicado en diferentes tareas como: reconocimiento de imágenes [10,22], análisis de imágenes [38,34,1,28], reconstrucción de imágenes [8,24], marca de agua [9,35,23], las cuales pueden ser aplicadas en áreas médicas, sistemas de seguridad, control de calidad, modelado, diseño, entre otros.

Dentro de la literatura han sido propuestos diferentes conjuntos de momentos para el análisis de imágenes, tales como momentos ortogonales discretos de Tchebichef [20], Krawtchouk [33], Hahn [36], Meixnier [18], Charlier [19] y Racah [31]. También ha surgido el interés para analizar objetos 3D mediante momentos ortogonales.

Novotni y Klein [21], introducen los invariantes de Zernike 3D para la recuperación de objetos 3D. Sin embargo, estos métodos basados en momentos radiales no pueden describir los objetos. De igual forma, Hosny y Khalid [14], muestran un algoritmo para el cálculo de los momentos de Legendre 3D, el cual presenta algunos problemas como el alto costo computacional, específicamente en ordenes altos.

Por otra parte, Yang et al.[32] proponen un algoritmo para el cómputo de momentos Gaussiano-Hermit invariantes de rotación, traslación y escala para el análisis de objetos 3D. Benouini et al. [2], presentan un nuevo conjunto de invariantes llamados momentos de Krawtchouk basados en las propiedades algebraicas de los polinomios de Krawtchouk para el reconocimiento de objetos 3D. Karmoni et al. [15], proponen el cómputo rápido de momentos de Charlier 3D mediante cubos para la reducción del tiempo computacional.

Batioua et al. [1], introducen conjuntos de momentos discretos tridimensionales separables TKKM (Momentos de Tchebichef-Krawtchouk-Krawtchouk) y TTKM (Momentos de Tchebichef-Tchebichef-Krawtchouk) en el campo del análisis de imágenes en 3D. Recientemente, Lakhili et al.[16], proponen un modelo de clasificación utilizando una red neuronal en conjunto con los momentos de Racah 3D para la clasificación de objetos.

En este trabajo se propone un análisis para la clasificación de objetos 3D utilizando los momentos ortogonales discretos de Hahn 3D como descriptores de entrada con diferentes clasificadores. Se utilizó la base de datos SHREC2011 [17] para realizar una serie de experimentos con diferentes ordenes.

El trabajo esta organizado de la siguiente manera; en la Sección 2, se presenta una visión breve del cómputo de los polinomios ortogonales de Hahn y el cálculo de los momentos para imágenes volumétricas. En la Sección 3, se muestra una breve descripción de diferentes clasificadores utilizados. En la Sección 4, se describe la propuesta de implementación del modelo de una red neuronal para la clasificación de objetos 3d. Finalmente en las Secciones 5 y 6 se presentan los resultados obtenidos de la clasificación de objetos 3D y conclusiones.

2. Momentos de Hahn 3D

Los momentos ortogonales de Hahn 3D de orden n, m, k de un objeto 3D $f(x, y, z)$ están definidos como [6]:

$$\Phi_{n,m,k} = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} \tilde{h}_n^{(a,b)}(x; N) \tilde{h}_m^{(a,b)}(y; M) * \tilde{h}_k^{(a,b)}(z; K) f(x, y, z), \tag{1}$$

donde los parámetros a y b están restringidos para $a > 0, b > 0, x = 0, 1, 2, \dots, N$, y los polinomios normalizados de Hahn $\tilde{h}_n^{(a,b)}$, están definidos como:

$$\tilde{h}_n^{(a,b)}(x; N) = h_n^{(a,b)}(x; N) \sqrt{\frac{W(x)}{d_n^2}}, \tag{2}$$

donde $W(x)$ es la función de peso, d_n^2 denota el cuadrado de la norma, y $h_n^{(a,b)}(x; N)$ son los polinomios de Hahn, los cuales están definidos de la siguiente manera:

$$h_n^{(a,b)}(x; N) = \frac{(-1)^n (b+1)_n (N-n)_n}{n!} * \tag{3}$$

$${}_3F_2(-n, -x, n+1+a+b, b+1, 1-N; 1), \tag{4}$$

$$W(x) = \frac{\Gamma(N+a-x)\Gamma(n+b+1+x)}{\Gamma(N-n-x)\Gamma(x+1)},$$

$$d_n^2 = \frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)\Gamma(a+b+n+1)_N}{(a+b+2n+1)n!(N-n-1)}, \tag{5}$$

donde $(a)_k$ es el símbolo de Pochhammer, ${}_3F_2$ es la función hipergeométrica y $\Gamma()$ es la función gamma. Desafortunadamente, la Ec. 3 causa inestabilidad numérica para ordenes mayores, para solucionar este problema se ha propuesto el uso de relaciones de recurrencia. Una forma para obtener los polinomios ortogonales discretos normalizados es mediante la siguiente relación de recurrencia [37]:

$$A\tilde{p}_n(x) = B \cdot D\tilde{p}_{n-1}(x) + C \cdot E\tilde{p}_{n-2}(x), \tag{6}$$

donde

$$A = \frac{n}{(a+b+2n-1)} * \frac{(a+b+n)}{(a+b+2n)}, \tag{7}$$

$$B = x - \frac{a-b+2N-2}{4} - \frac{(b^2-a^2)(a+b+2N)}{4(a+b+2n-2)(a+b+2n)}, \tag{8}$$

$$C = -\frac{(a+n-1)(N-n+2)}{(a+b+2n-1)} \frac{(a+b+N+n-1)(N-n+1)}{(a+b+2n-1)}, \tag{9}$$

$$D = \sqrt{\frac{n(a+b+n)}{(a+n)(b+n)(a+b+n+N)}} \sqrt{\frac{(a+b+2n+1)}{(N-n)(a+b+2n-1)}}, \tag{10}$$

$$E = \sqrt{\frac{n(n-1)(a+b+n)}{(a+n)(a+n-1)(b+n)(b+n-1)(N-n+1)(N-n)}} \tag{11}$$

$$* \sqrt{\frac{(a+b+n-1)(a+b+2n+1)}{(a+b+2n-3)(a+b+n+N)(a+b+n+N-1)}} ,$$

Para el cálculo inicial, los polinomios de Hahn normalizados de orden cero y de primer orden están dados por:

$$\tilde{h}_0^{(a,b)}(x; N) = \sqrt{\frac{w(x)}{d_0^2}}, \tag{12}$$

$$\tilde{h}_1^{(a,b)}(x; N) = ((a+b+2)x - (b+1)(N-1)) \sqrt{\frac{w(x)}{d_1^2}}.$$

La Fig. 1, muestra la gráfica de los polinomios de Hahn con diferentes valores de a y b . La concentración de la distribución de ceros de los polinomios de Hahn es donde los descriptores concentran la capacidad descriptiva.

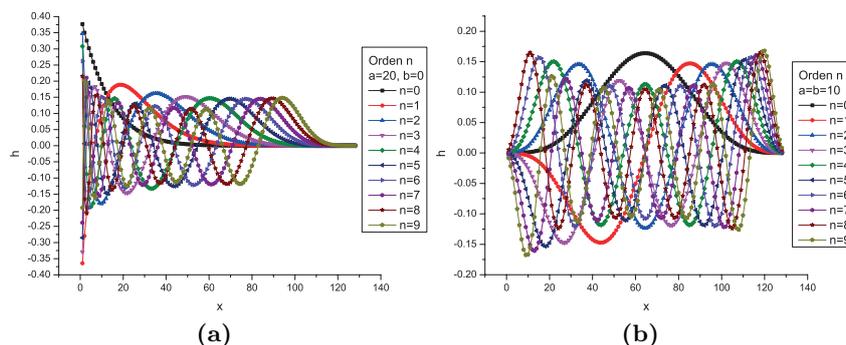


Fig. 1. Primeros 10 polinomios de Hahn con diferentes valores: a) $a = 20$ y $b = 0$, b) $a = b = 10$.

Una de las características más importante de los momentos ortogonales discretos 3D es de conocer la capacidad descriptiva a partir de la reconstrucción del objeto mediante un número finito de momentos.

La recuperación de un objeto 3D $f(x, y, z)$ mediante la transformación inversa de los momentos esta definida de la siguiente forma:

$$\tilde{f}(x, y, z) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} \tilde{h}_n^{(a,b)}(x; N) \tilde{h}_m^{(a,b)}(y; M) \times \tilde{h}_k^{(a,b)}(z; K) \Phi_{n,m,k}. \tag{13}$$

Para evaluar la calidad de la reconstrucción de un objeto 3D mediante momentos de Hahn, es necesario utilizar la métrica del error cuadrático medio (MSE), que se emplea para medir la diferencia entre los objetos originales y reconstruidos. El MSE se define de la siguiente manera:

$$MSE = \frac{1}{NMK} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \sum_{z=0}^{K-1} \left(f(x, y, z) - \tilde{f}(x, y, z) \right)^2, \quad (14)$$

donde $f(x, y, z)$ y $\tilde{f}(x, y, z)$ denotan la imagen original y reconstruida respectivamente para cada voxel (x, y, z) . La Fig. 2 muestra la reconstrucción de tres objetos utilizando diferentes ordenes de $n \times m \times k = 10, 15, 20$, así como el error de reconstrucción (MSE) obtenido de cada objeto.

Objeto original 128x128x128	Objeto reconstruido con diferente orden 32x32x32	64x64x64	128x128x128
 MSE	 0.0356	 0.0042	 0
 MSE	 0.0259	 0.0031	 0
 MSE	 0.0401	 0.0046	 0

Fig. 2. Resultados de la reconstrucción de objetos 3D de diferentes clases de la base de datos SHREC11 [17].

3. Clasificación de objetos 3D

La clasificación es un área del aprendizaje supervisado en el cual un algoritmo aprende a clasificar las nuevas observaciones a partir de ejemplos de datos etiquetados y descriptores que permiten realizar entrenamiento automatizado para buscar el mejor tipo de modelo de clasificación. En la literatura existen diferentes algoritmos de clasificación que pueden ser utilizados con los momentos discretos ortogonales de Hahn 3D. Los más representativos son los siguientes algoritmos.

Análisis discriminante [30] El análisis discriminante es un método de clasificación supervisada que se utiliza para la clasificación de distintos datos en grupos o clases. Este método equivale a un análisis de regresión en donde la variable categórica es la clase y las variables independientes determinan a que clase pertenece un objeto, también se conoce como el discriminante Fisher, suponiendo que tiene g poblaciones conocidas $\Omega_1, \dots, \Omega_g$ y en cada una de ellas se observa una muestra de cierto vector de interés $X = (X_1, \dots, X_p)'$. El análisis discriminante se ocupa de describir, mediante las variables X_i , los rasgos diferenciales entre las poblaciones, encontrando funciones discriminantes o reglas de decisión $h = h(X_1, \dots, X_p)$ cuyos valores en los distintos grupos o poblaciones estén lo mas separado posible que permitan asignar a cada individuo a una población concreta $\Omega_\alpha, \alpha = 1, \dots, g$, minimizando la tasa de error en dicha asignación.

Árboles de decisión [3] Los árboles de clasificación y regresión son métodos de clasificación supervisada y de aprendizaje automático, los cuales son utilizados para construir modelos de predicción a partir de los datos de entrada, se basan en una estructura en forma de árbol, donde cada hoja del árbol se marca con una clase o una distribución de probabilidad sobre las clases, las ramificaciones se generan de forma recursiva hasta que se cumplan ciertos criterios, de acuerdo a la cantidad de ramificaciones se termina la profundidad y flexibilidad en árbol grueso para pocas hojas para hacer distinciones baja entre clases con un máximo de 4 máximo de divisiones, árbol mediano con un numero medio de hojas para distinciones más finas entre clases con 20 divisiones como máximo y árbol fino utiliza un numero mayor de hojas para la distinción entre clases mayor a 20 divisiones.

K-NN (vecinos más cercanos) [13] El método de vecinos más cercanos es un método de clasificación supervisada, el cual almacena los datos disponibles, y clasifica un objeto según una medida de similitud dada por una función de distancia. La clasificación KNN se realiza midiendo la distancia entre el objeto con los objetos conocidos. Es un método, que puede utilizarse para problemas de predicción tanto de clasificación como de regresión. Este algoritmo clasifica cada dato nuevo en el grupo que corresponda, según tenga k vecinos más cerca de un grupo o de otro, es decir, calcula la distancia del elemento nuevo a cada uno de los existentes, y ordena dichas distancias de menor a mayor para ir seleccionando el grupo al que debe pertenecer. Este grupo será el de mayor frecuencia con menores distancias. Para variables continuas las funciones distancia a utilizar son, euclidiana, manhat, Minkowski, en el caso de variables categóricas se debe usar la distancia de Hamming. Un clasificador KNN presenta diferentes configuraciones de acuerdo al número de vecinos: grueso para un número $k=100$, mediano para $k=10$ o fino con $k=1$ y la métrica de distancia puede utilizar métricas como coseno, cúbica y ponderado.

Máquinas de soporte vectorial [29] Una máquina de soporte vectorial es un método de aprendizaje supervisado para la clasificación que genera funciones

de mapeo de entrada-salida a partir de un conjunto de datos de entrenamiento etiquetados, los cuales utilizan un hiperplano de separación lineal para crear un clasificador con un margen máximo. Dado un conjunto de entrenamiento de tamaño N compuesto de pares atributo-etiqueta $(x_i, y_i), 1 \leq i \leq N$, siendo $x_i \in \mathbb{R}^n$ Y $y_i \in \{-1, 1\}$, se desea obtener una ecuación para un hiperplano que divida dicho conjunto de entrenamiento, de manera que aquellos puntos con igual etiqueta queden del mismo lado del hiperplano. Si existe un hiperplano que aisle los puntos positivos de los negativos, se dice que los datos son linealmente separables. El hiperplano que separa los datos es: $\pi : w \cdot x + b = 0$, donde $w \in \mathbb{R}^d$ es un vector normal (vector perpendicular) al hiperplano $\pi, |b| / \|w\|$ la distancia perpendicular del hiperplano π al origen, y $\|w\|$ es la norma de w . Las máquinas de vectores de soporte pertenecen a una clase de algoritmos de Machine Learning denominados métodos kernel: lineal, cuadrático, cúbico y Gaussiano.

Ensamble [5] El método ensamble o de conjunto son algoritmos de aprendizaje que construyen un conjunto de clasificadores y luego clasifican nuevos datos de entrada tomando un voto ponderado de sus predicciones. Se han desarrollado muchos métodos para construir conjuntos mediante arboles, vecinos cercanos y discriminantes.

Para analizar el rendimiento de clasificación de cada uno de los modelos mencionados, se utiliza el conjunto de imágenes 3D de la base de datos SHREC 2011, la cual consta de 600 objetos 3D clasificados en 30 clases con 20 modelos STL [17]. Las distintas clases de la base de datos SHREC11 se muestran en la Fig. 3.

Es necesario utilizar el formato voxelizado de todos los objetos de la base de datos para el cómputo de los descriptores tipo momento. Para obtener la forma voxelizada de cada objeto 3D del conjunto de datos está encerrado en el cubo delimitador más pequeño, que luego se divide en un conjunto de vóxeles con forma de cubo iguales. En este trabajo, el tamaño del voxel que se utiliza para todos los objetos de la base de datos cuenta con una resolución de $128 \times 128 \times 128$ vóxeles.

El proceso de clasificación para cada modelo, se realiza mediante la técnica de validación cruzada K-folds con $k=10$ tomando como métrica el valor de precisión o accuracy y el cálculo de momentos de Hahn de la base de datos con parámetros de $a = b = 10$ como descriptores de entrada. Los resultados de la clasificación se muestran en la Tabla 1.

4. Implementación de modelo de una red neuronal

Las redes neuronales son un modelo computacional inspirado en el comportamiento biológico observado de las neuronas y en cómo se organizan formando la estructura del cerebro. Recientemente, las redes neuronales profundas han demostrado un gran éxito en muchas tareas de visión por computadora, específicamente en la aplicación de reconocimiento de objetos[16]. El diseño

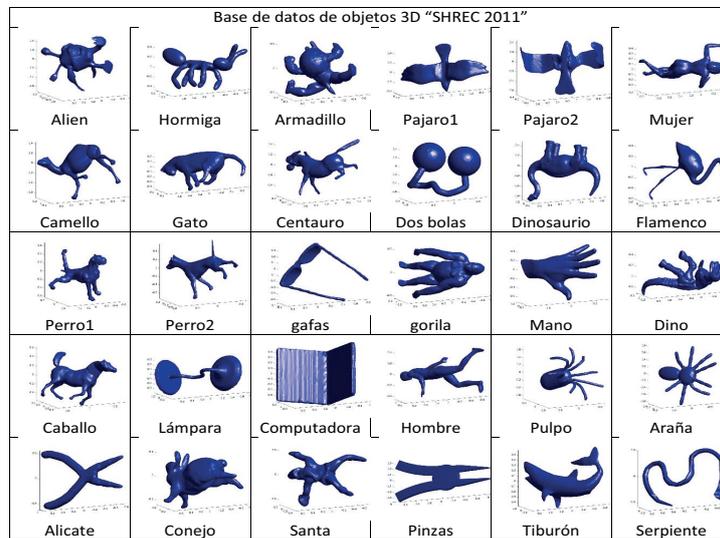


Fig. 3. Imágenes 3D de las diferentes clases de la base de datos SHREC11.

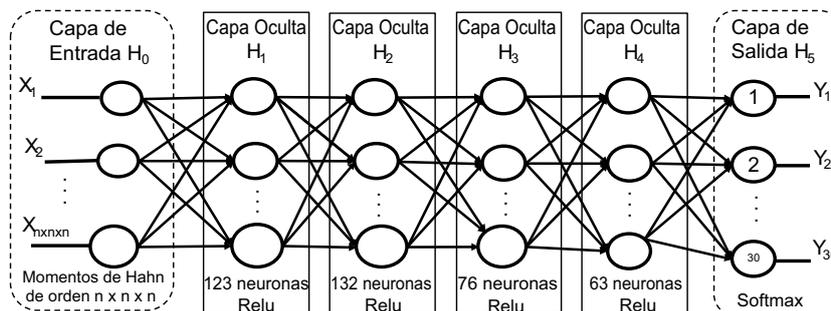


Fig. 4. Representación gráfica de la red neuronal utilizada para la clasificación de objetos.

de arquitecturas de redes neuronales puede ser un problema; si se utiliza una cantidad insuficiente de neuronas puede proporcionar tasas de clasificación insatisfactorias y por lo contrario, si se elige demasiadas neuronas aumenta el tiempo de entrenamiento y provoca un sobre ajuste, el cual disminuye la capacidad de generalización[11]. Un modelo de red neuronal está compuesta por tres capas principales; la capa de entrada, las capas ocultas y la capa de salida.

El proceso de aprendizaje consiste en encontrar los valores óptimos de los pesos y sesgos de los nodos de cada capa de tal forma que la salida corresponda al patrón de entrada con la precisión deseada, mediante el uso algoritmos optimizadores y funciones de activación. La función Softmax es utilizada para modelos

Tabla 1. Comparación de diferentes clasificadores utilizando como vector de entrada distintos ordenes de los momentos de Hahn con valores de parámetros a=10, b=10.

Modelos de Clasificación	Orden n x m x k				
	25x25x25	20x20x20	15x15x15	10x10x10	5x5x5
Árboles de decisión					
Árbol fino (100 divisiones)	24.3 %	28.2 %	25.2 %	28.0 %	37.7 %
Árbol mediano (20 divisiones)	18.7 %	22.2 %	19.0 %	20.3 %	27.2 %
Árbol grueso (4 divisiones)	12.0 %	12.3 %	12.5 %	12.8 %	12.3 %
Análisis discriminante					
Discriminante Lineal	22.5 %	38.0 %	40.3 %	31.2 %	45.3 %
Máquina de soporte vectorial (SVM)					
SVM Lineal	23.4 %	31.5 %	39.0 %	43.3 %	48.2 %
SVM Cuadrático	20.8 %	32.7 %	38.2 %	46.0 %	56.2 %
SVM Cúbico	21.1 %	25.7 %	32.5 %	43.2 %	55.5 %
SVM Gaussiano fino (escala=1.9)	5.2 %	7.3 %	9.2 %	10.5 %	26.3 %
SVM gaussiano medio (escala=7.7)	30.7 %	39.7 %	46.2 %	49.7 %	57.8 %
SVM gaussiano grueso (escala=31)	23.9 %	31.8 %	38.0 %	43.0 %	38.8 %
Clasificador vecinos cercanos (KNN)					
KNN Fino (k=1)	23.8 %	29.0 %	34.0 %	38.5 %	55.8 %
KNN Mediano (k=10)	8.3 %	10.2 %	11.2 %	16.7 %	43.8 %
KNN Grueso (k=100)	3.7 %	4.2 %	3.2 %	4.3 %	22.7 %
KNN coseno	34.0 %	35.8 %	37.5 %	41.5 %	41.3 %
KNN cubico	6.7 %	9.3 %	10.5 %	16.3 %	42.0 %
KNN Ponderado	11.5 %	13.3 %	15.2 %	22.5 %	52.8 %
Clasificador ensamble					
Árboles potenciados	23.2 %	25.4 %	27.9 %	31.3 %	39.0 %
Subespacio Discriminante	19.2 %	23.3 %	25.8 %	30.0 %	53.0 %
Subespacio KNN	40.5 %	44.8 %	48.7 %	57.8 %	65.3 %

de clasificación múltiple, normaliza el vector de entrada en una distribución de probabilidad donde la suma total es uno. En general, esta función devuelve las probabilidades de cada clase sobre todas las clases.

En este trabajo se propone utilizar como vector de entrada los momentos ortogonales discretos 3D a una red neuronal compuesta por seis capas distintas: una capa de entrada, cuatro capas ocultas y una capa de salida.

La Fig. 4, muestra el diagrama de las características utilizadas en la estructura de la red neuronal implementada en el modelo de clasificación propuesto.

La Ec. (15) muestra los valores de entrada en la primer capa con los valores obtenidos del cálculo de momentos 3D de Hahn de orden $n \times m \times k$:

$$V = [\Phi_{n,m,k} | n \times m \times k]. \tag{15}$$

En las capas ocultas se utiliza una estructura compuestas por 125, 135, 76, 63 neuronas respectivamente, se representan como:

$$Y_{Hi} = \phi_{Hi}(b^{Hi} + W^{Hi} \times Y_{Hi-1}), \tag{16}$$

donde $Y_{H0} = V$ es un vector de entrada para $\neq 0$, Y_{Hi} es el vector de salida de la i -ésima capa oculta Hi , W^{Hi} es la matriz de pesos que conecta las capas $Hi - 1$ y Hi , b^{Hi} es en vector de bias y ϕ_{Hi} es la función de activación utilizada en cada capa Hi . La función de activación utilizada para las capas ocultas es la función RELU definida como:

$$f(x) = \max(0, x). \tag{17}$$

Finalmente la capa de salida está compuesta por el número de neuronas equivalente al número de clases contenida por la base de datos y emplea la función de activación Softmax representada matemáticamente como:

$$\text{Softmax}(y^i) = \frac{e^{y^i}}{\sum_{i=1}^s e^{y^i}}. \tag{18}$$

Tabla 2. Porcentajes de clasificación obtenidos utilizando diferentes tamaño de la base de datos SHREC11 para entrenamiento y distintos ordenes de momentos de Hahn con parámetros $a = 10$, $b = 10$.

Momentos de orden $n \times m \times k$	80 % de la base de datos	50 % de la base de datos
4 x 4 x 4	99.76 %	96.64 %
5 x 5 x 5	99.74 %	96.62 %
10 x 10 x 10	99.58 %	96.51 %
15 x 15 x 15	99.36 %	95.88 %
20 x 20 x 20	99.26 %	95.43 %
25 x 25 x 25	99.06 %	95.39 %

5. Experimentos y resultados

En esta sección se realiza un conjunto de experimentos para evaluar el desempeño en la clasificación del modelo de red neuronal propuesto cambiando el

número de descriptores. También, se comprueba la superioridad del método propuesto comparando los porcentajes de clasificación obtenidos al variar la cantidad de datos utilizados durante el proceso de entrenamiento en comparación con los métodos existentes basados en algoritmos de parametrización, obtención de características como puntos de interés, regiones significativas y redes residuales, que han sido propuestos en literatura para la clasificación en [4,21,27,12,25,26,7].

Tabla 3. Comparación de resultados de clasificación de la base de datos con otros métodos.

Método	50 % de la base de datos	80 % de la base de datos
SG [4]	62.6 %	70.8 %
Zer [21]	43.3 %	50.8 %
LFD [7]	56.7 %	65.8 %
SN [27]	52.7 %	48.4 %
Conf [12]	60.6 %	85.0 %
Sph [25]	59.0 %	82.5 %
GI [26]	88.6 %	96.6 %
DNN propuesta	99.64 %	99.76 %

Durante el primer experimento, se realiza la clasificación de la base de datos tomando dos casos de pruebas mediante la separación de la base de datos en dos grupos de forma aleatoria utilizados en métodos existentes; en el primer caso, se utiliza un total de 480 muestras para el entrenamiento de la base de datos equivalente al 80 % del total de los objetos, mientras que las 120 muestras restantes igual al 20 % se utilizan como objetos de prueba; en el segundo caso, se utiliza para el entrenamiento de la base de datos el 50 % para el entrenamiento y el 50 % restante se utiliza como objetos de prueba.

Para el segundo experimento, se calcularon los momentos de Hahn 3D con diferentes ordenes de $n = m = k = 5, 10, 15, 20, 25$, utilizando como parámetros $a = b = 10$ para el cómputo de los polinomios de Hahn, los cuales fueron utilizados como valores de entrada para la red neuronal implementada.

Los resultados obtenidos del porcentaje la clasificación de la base de datos SHREC11 utilizando como métrica el valor de precisión (accuracy) se observan en la Tabla 2.

De acuerdo con los resultados obtenidos de la Tabla 2, la capacidad de descripción de los momentos de Hahn para ordenes bajos, mejora la capacidad de obtener las características más importantes de cada objeto con un porcentaje de clasificación alto. Además, se realiza un número menor de operaciones durante el entrenamiento.

Por otra parte, la Tabla 3 muestra que la clasificación mediante redes neuronales utiliza la misma cantidad datos que otros métodos y obtiene una mejor precisión durante la clasificación.

6. Conclusiones

En este trabajo, se presentó un análisis del desempeño de clasificadores como árboles de decisión, análisis discriminante, vecinos cercanos, máquina de soporte vectorial y ensamble para los momentos ortogonales de Hahn 3D. Los resultados obtenidos a partir de la clasificación de la base de datos SHREC11 demuestran que la clasificación basada en redes neuronales y momentos de Hahn 3D tiene un mejor porcentaje de clasificación en comparación con diferentes modelos clasificación. Además, como se muestra en la Tabla 3, el método propuesto tiene un buen desempeño en comparación con los métodos existentes. El trabajo presentado ayudará a realizar nuevas arquitecturas de redes neuronales que aprovechen la capacidad descriptiva de los momentos de Hahn 3D de bajo orden.

Referencias

1. Batioua, I., Benouini, R., Zenkour, K., Zahi, A., et al.: 3d image analysis by separable discrete orthogonal moments based on krawtchouk and tchebichef polynomials. *Pattern Recognition* 71, 264–277 (2017)
2. Benouini, R., Batioua, I., Zenkour, K., Najah, S., Qjidaa, H.: Efficient 3d object classification by using direct krawtchouk moment invariants. *Multimedia Tools and Applications* 77(20), 27517–27542 (2018)
3. Breiman, L., Friedman, J., Stone, C., Olshen, R.: *Classification and regression trees*; 2017
4. Bronstein, A.M., Bronstein, M.M., Guibas, L.J., Ovsjanikov, M.: Shape google: Geometric words and expressions for invariant shape retrieval. *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 30(1), 1–20 (2011)
5. Cadenas, J.M., Garrido, M.C., Daz-Valladares, R.: Mejorando el comportamiento de ensambles basados en boosting, bagging y random forest mediante soft computing. In: *Proc. Novena Conf. Iberoam. en Sistemas, Ciberntica e Informtica*. pp. 1–10 (2010)
6. Canterakis, N.: 3d zernike moments and zernike affine invariants for 3d image analysis and recognition. In: *In 11th Scandinavian Conf. on Image Analysis* (1999)
7. Chen, D.Y., Tian, X.P., Shen, Y.T., Ouhyoung, M.: On visual similarity based 3d model retrieval. In: *Computer Graphics Forum*. vol. 22(3), pp. 223–232. Wiley Online Library (2003)
8. Dai, X., Shu, H., Luo, L., Han, G.N., Coatrieux, J.L.: Reconstruction of tomographic images from limited range projections using discrete radon transform and tchebichef moments. *Pattern Recognition* 43(3), 1152–1164 (2010)
9. Deng, C., Gao, X., Li, X., Tao, D.: A local tchebichef moments-based robust image watermarking. *Signal Processing* 89(8), 1531–1539 (2009)
10. Flusser, J., Zitova, B., Suk, T.: *Moments and moment invariants in pattern recognition*. John Wiley & Sons (2009)
11. Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A.: *Deep Learning*. MIT Press (2016), <http://www.deeplearningbook.org>
12. Gu, X., Wang, Y., Chan, T.F., Thompson, P.M., Yau, S.T.: Genus zero surface conformal mapping and its application to brain surface mapping. *IEEE Transactions on Medical Imaging* 23(8), 949–958 (2004)

13. He, Q.P., Wang, J.: Fault detection using the k-nearest neighbor rule for semiconductor manufacturing processes. *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing* 20(4), 345–354 (2007)
14. Hosny, K.M.: Fast and low-complexity method for exact computation of 3d legendre moments. *Pattern Recognition Letters* 32(9), 1305–1314 (2011)
15. Karmouni, H., Jahid, T., Sayyouri, M., Hmimid, A., Qjidaa, H.: Fast reconstruction of 3d images using charlier discrete orthogonal moments. *Circuits, Systems, and Signal Processing* 38(8), 3715–3742 (2019)
16. Lakhili, Z., El Alami, A., Mesbah, A., Berrahou, A., Qjidaa, H.: Deformable 3d shape classification using 3d racah moments and deep neural networks. *Proceeding Computer Science* 148, 12–20 (2019)
17. Lian, Z., Godil, A., Bustos, B., Daoudi, M., Hermans, J., Kawamura, S., Kurita, Y., Lavou, G., Nguyen, H.V., Ohbuchi, R., Ohkita, Y., Ohishi, Y., Porikli, F., Reuter, M., Sipiran, I., Smeets, D., Suetens, P., Tabia, H., Vandermeulen, D.: SHREC'11 Track: Shape Retrieval on Non-rigid 3D Watertight Meshes. In: *Eurographics Workshop on 3D Object Retrieval*. pp. 79–88 (2011)
18. Lorente, A.S., Moreno-Roque, E., Martí-Zamora, J.: Classical orthogonal polynomials in a discrete variable, their history, extensions and applications. *Lect. Mat* 35, 5–24 (2014)
19. Mikhailov, G.A.: *Optimization of weighted Monte Carlo methods*. Springer (1992)
20. Mukundan, R., Ong, S., Lee, P.A.: Image analysis by tchebichef moments. *IEEE Transactions on image Processing* 10(9), 1357–1364 (2001)
21. Novotni, M., Klein, R.: Shape retrieval using 3d zernike descriptors. *Computer-Aided Design* 36(11), 1047–1062 (2004)
22. Papakostas, G.: *Moments and moment invariants: theory and applications*. Science Gate 1, 3–32 (2014)
23. Rivera-López, J., Bello, C.C.: Efficient encryption of image data in video sequences using discrete orthogonal moments. In: *Applications of Digital Image Processing XL*. vol. 10396, p. 103962Z. International Society for Optics and Photonics (2017)
24. Rivera-López, J., Camacho-Bello, C., et al.: Color image reconstruction by discrete orthogonal moment. *Journal of Data Analysis and Information Processing* 5(4), 156–166 (2017)
25. Shen, L., Makedon, F.: Spherical mapping for processing of 3d closed surfaces. *Image and Vision Computing* 24(7), 743–761 (2006)
26. Sinha, A., Bai, J., Ramani, K.: Deep learning 3d shape surfaces using geometry images. In: *European Conference on Computer Vision*. pp. 223–240. Springer (2016)
27. Song, S., Lichtenberg, S.P., Xiao, J.: Sun rgb-d: A rgb-d scene understanding benchmark suite. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. pp. 567–576 (2015)
28. Uchaev, D.V., Uchaev, D.V., Malinnikov, V.A.: Chebyshev-based technique for automated restoration of digital copies of faded photographic prints. *Journal of electronic imaging* 26(1), 011024 (2017)
29. Wang, L.: *Support vector machines: theory and applications*, vol. 177. Springer Science & Business Media (2005)
30. Wang, M., Ruan, Q.: Palmprint recognition based on two-dimensional methods. In: *2006 8th International Conference on Signal Processing*. vol. 4 (2006)
31. Wu, Y., Liao, S.: Chinese characters recognition via racah moments. In: *International Conference on Audio, Language and Image Processing*. pp. 691–694 (2014)
32. Yang, B., Flusser, J., Suk, T.: 3d rotation invariants of gaussian-hermite moments. *Pattern Recognition Letters* 54, 18–26 (2015)

33. Yap, P.T., Paramesran, R., Ong, S.H.: Image analysis by krawtchouk moments. *IEEE Transactions on image processing* 12(11), 1367–1377 (2003)
34. Yap, P.T., Paramesran, R., Ong, S.H.: Image analysis using hahn moments. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence* 29(11), 2057–2062 (2007)
35. Zhang, L., Qian, G.b., Xiao, W.w., Ji, Z.: Geometric invariant blind image watermarking by invariant tchebichef moments. *Optics Express* 15(5), 2251–2261 (2007)
36. Zhou, J., Shu, H., Zhu, H., Toumoulin, C., Luo, L.: Image analysis by discrete orthogonal hahn moments. In: *International Conference Image Analysis and Recognition*. pp. 524–531. Springer (2005)
37. Zhu, H., Liu, M., Shu, H., Zhang, H., Luo, L.: General form for obtaining discrete orthogonal moments. *IET Image Processing* 4(5), 335–352 (2010)
38. Zhu, H., Shu, H., Liang, J., Luo, L., Coatrieux, J.L.: Image analysis by discrete orthogonal racah moments. *Signal Processing* 87(4), 687–708 (2007)